Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

1.5 Exponentes

1 Uso de la regla del producto para exponentes.
2 Uso de la regla del cociente para exponentes.
3 Uso de la regla del exponente negativo.
4 Uso de la regla del exponente cero.
5 Uso de la regla para elevar una potencia a otra potencia.
6 Uso de la regla para elevar un producto a una potencia.
7 Uso de la regla para elevar un cociente a una potencia.

Comprendiendo el álgebra

Cuando *multiplicamos* expresiones con la misma base, mantenemos la base y *sumamos los exponentes*:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$$

En esta sección analizaremos las reglas de los exponentes.

1 Uso de la regla del producto para exponentes

Considera la multiplicación $x^3 \cdot x^5$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$x^3 \cdot x^5 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^8$$

Este problema puede simplificarse usando la **regla del producto para exponentes**.*

Regla del producto para exponentes

Si m y n son números naturales y a es cualquier número real, entonces

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Para multiplicar expresiones exponenciales, mantén la base común y suma los exponentes.

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

EJEMPLO 1 Simplifica. **a)** $2^3 \cdot 2^4$ **b)** $d^2 \cdot d^5$ **c)** $h \cdot h^9$

Solución

a) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$ **b)** $d^2 \cdot d^5 = d^{2+5} = d^7$

c) $h \cdot h^9 = h^1 \cdot h^9 = h^{1+9} = h^{10}$

Resuelve ahora el ejercicio 13

*Las reglas que se dan en esta sección también se aplican para exponentes racionales o fraccionarios.

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

2 Uso de la regla del cociente para exponentes

Considera la división $x^7 \div x^4$. Podemos simplificar la expresión como sigue:

$$\frac{x^7}{x^4} = \frac{\overset{1}{\cancel{x}} \cdot \overset{1}{\cancel{x}} \cdot \overset{1}{\cancel{x}} \cdot \overset{1}{\cancel{x}} \cdot x \cdot x \cdot x}{\underset{1}{\cancel{x}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}}} = x \cdot x \cdot x = x^3$$

Este problema podría ser simplificado por medio de la **regla del cociente para exponentes**.

Comprendiendo el álgebra

Cuando *dividimos* expresiones con la misma base, mantenemos la base y *restamos los exponentes*:

$$\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2 \text{ (o } 25\text{)}$$

Regla del cociente para exponentes

Si a es cualquier número real diferente de cero y m y n son enteros diferentes de cero, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Para dividir expresiones en forma exponencial, mantén la base y resta los exponentes.

$$\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$$

EJEMPLO 2 Simplifica. **a)** $\frac{6^4}{6^2}$ **b)** $\frac{x^7}{x^3}$ **c)** $\frac{y^2}{y^5}$

Solución **a)** $\frac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2 = 36$ **b)** $\frac{x^7}{x^3} = x^{7-3} = x^4$ **c)** $\frac{y^2}{y^5} = y^{2-5} = y^{-3}$

Resuelve ahora el ejercicio 15

3 Uso de la regla del exponente negativo

Observa que en el ejemplo 2 inciso **c)** la respuesta contiene un exponente negativo. Realiza el inciso **c)** nuevamente cancelando los factores comunes.

$$\frac{y^2}{y^5} = \frac{\overset{1}{\cancel{y}} \cdot \overset{1}{\cancel{y}}}{\underset{1}{\cancel{y}} \cdot \underset{1}{\cancel{y}} \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{1}{y^3}$$

Al reducir factores comunes y usar el resultado del ejemplo 2 inciso **c)**, podemos razonar que $y^{-3} = \frac{1}{y^3}$. Este es un ejemplo de la regla del exponente negativo.

Comprendiendo el álgebra

Cuando simplificamos expresiones con una base elevada a un *exponente negativo*, la respuesta es una fracción cuyo *numerador* es 1 y el *denominador* es la base elevada a un *exponente positivo*:

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

Regla del exponente negativo

Para cualquier número real a diferente de cero y cualquier número entero positivo m, tenemos

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Una expresión elevada a un exponente negativo es igual a 1 dividido entre la expresión con el signo del exponente cambiado.

EJEMPLO 3 Escribe cada expresión sin exponentes negativos.

a) 7^{-2} **b)** $8a^{-6}$ **c)** $\frac{1}{c^{-5}}$

Solución

a) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ **b)** $8a^{-6} = 8 \cdot \frac{1}{a^6} = \frac{8}{a^6}$

c) $\frac{1}{c^{-5}} = 1 \div c^{-5} = 1 \div \frac{1}{c^5} = \frac{1}{1} \cdot \frac{c^5}{1} = c^5$

Resuelve ahora el ejercicio 37

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

Consejo útil

En el ejemplo 3 inciso **c)** mostramos que $\frac{1}{c^{-5}} = c^5$. En general, para cualquier número real a diferente de cero y cualquier entero positivo m, $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$. Cuando un factor del numerador o del denominador está elevado a cualquier potencia, el factor puede moverse al otro lado de la fracción, siempre y cuando el signo del exponente esté cambiado. Así, por ejemplo,

$$\frac{2a^{-3}}{b^2} = \frac{2}{a^3b^2} \qquad \frac{a^{-2}b^4}{c^{-3}} = \frac{b^4c^3}{a^2}$$

NOTA: al usar este procedimiento, el signo de la base no cambia, solo cambia el signo del exponente. Por ejemplo,

$$-c^{-3} = -(c^{-3}) = -\frac{1}{c^3}$$

Por lo general, no dejamos expresiones exponenciales con exponentes negativos. *Cuando decimos que una expresión exponencial se simplificará, queremos decir que la respuesta debe escribirse sin exponentes negativos o cero.*

EJEMPLO 4 Simplifica. **a)** $\frac{5xz^2}{y^{-4}}$ **b)** $4^{-2}x^{-1}y^2$ **c)** $-3^3x^2y^{-6}$

Solución

a) $\frac{5xz^2}{y^{-4}} = 5xy^4z^2$ **b)** $4^{-2}x^{-1}y^2 = \frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{x^1}\cdot y^2 = \frac{y^2}{16x}$

c) $-3^3x^2y^{-6} = -(3^3)x^2\cdot\frac{1}{y^6} = -\frac{27x^2}{y^6}$

Resuelve ahora el ejercicio 41

Observa que las expresiones en el ejemplo 4 no incluyen sumas o restas. La presencia de un signo más o menos lo convierte en un problema muy diferente, como lo veremos a continuación.

EJEMPLO 5 Simplifica. **a)** $4^{-1} + 6^{-1}$ **b)** $2\cdot 3^{-2} + 7\cdot 6^{-2}$

Solución

a) $4^{-1} + 6^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ Regla del exponente negativo

$= \frac{3}{12} + \frac{2}{12}$ Reescribe con el mínimo común denominador, 12.

$= \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$

b) $2\cdot 3^{-2} + 7\cdot 6^{-2} = 2\cdot\frac{1}{3^2} + 7\cdot\frac{1}{6^2}$ Regla del exponente negativo

$= \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{9} + \frac{7}{1}\cdot\frac{1}{36}$

$= \frac{2}{9} + \frac{7}{36}$

$= \frac{8}{36} + \frac{7}{36}$ Reescribe con el mínimo común denominador, 36.

$= \frac{8+7}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

Resuelve ahora el ejercicio 75

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

4 Uso de la regla del exponente cero

La siguiente regla que estudiaremos es la **regla del exponente cero**. Cualquier número diferente de cero dividido entre sí mismo es 1. Por lo tanto,

$$\frac{x^5}{x^5} = 1.$$

Por medio de la regla del cociente para los exponentes,

$$\frac{x^5}{x^5} = x^{5-5} = x^0.$$

Como $x^0 = \frac{x^5}{x^5}$ y $\frac{x^5}{x^5} = 1$, entonces

$$x^0 = 1.$$

Regla del exponente cero

Si a es cualquier número real diferente de cero, entonces

$$a^0 = 1$$

La regla del exponente cero ilustra que *cualquier número real diferente de cero con un exponente 0 es igual a 1*. Debemos especificar que $a \neq 0$, ya que 0^0 está indefinido.

EJEMPLO 6 Simplifica (asume que la base no es 0).

a) 162^0 **b)** $7p^0$ **c)** $-y^0$ **d)** $-(8x + 9y)^0$

Solución

a) $162^0 = 1$ **b)** $7p^0 = 7 \cdot p^0 = 7 \cdot 1 = 7$

c) $-y^0 = -1 \cdot y^0 = -1 \cdot 1 = -1$

d) $-(8x + 9y)^0 = -1 \cdot (8x + 9y)^0 = -1 \cdot 1 = -1$

Resuelve ahora el ejercicio 33

5 Uso de la regla para elevar una potencia a otra potencia

Considera la expresión $(x^3)^2$. Podemos simplificar esa expresión como sigue:

$$(x^3)^2 = x^3 \cdot x^3 = x^{3+3} = x^6$$

Este problema también podría simplificarse por medio de la regla para **elevar una potencia a otra potencia** (también conocida como **regla de la potencia**).

Comprendiendo el álgebra

Cuando elevamos una *potencia* a otra *potencia*, mantenemos la base y *multiplicamos* los exponentes:

$$(a^4)^3 = a^{4 \cdot 3} = a^{12}$$

Elevar una potencia a otra potencia (regla de la potencia)

Si a es cualquier número real y m y n son enteros, entonces

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Para elevar una expresión exponencial a una potencia, mantén la base y multiplica los exponentes.

$$(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$$

EJEMPLO 7 Simplifica (asume que la base no es 0).

a) $(2^2)^3$ **b)** $(z^{-5})^4$ **c)** $(2^{-3})^2$

Solución

a) $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$ **b)** $(z^{-5})^4 = z^{-5 \cdot 4} = z^{-20} = \frac{1}{z^{20}}$

c) $(2^{-3})^2 = 2^{-3 \cdot 2} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

Resuelve ahora el ejercicio 81

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

Consejo útil

Con frecuencia los estudiantes confunden la *regla del producto*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

con la *regla de la potencia*

$$(a^m)^n = a^{-m \cdot n}$$

Por ejemplo, $(x^3)^2 = x^6$, no x^5, y $(y^2)^5 = y^{10}$, no y^7.

6 Uso de la regla para elevar un producto a una potencia

Considera la expresión $(xy)^2$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = x \cdot x \cdot y \cdot y = x^2y^2$$

Esta expresión también podría simplificarse por medio de la regla para **elevar un producto a una potencia**.

Comprendiendo el álgebra

Cuando elevamos un producto a una potencia, elevamos cada factor del producto a la potencia:

$$(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225$$

Elevar un producto a una potencia

Si a y b son números reales y m es entero, entonces

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Para elevar un producto a una potencia, eleva todos los factores dentro del paréntesis a la potencia fuera de los paréntesis.

EJEMPLO 8 Simplifica. **a)** $(-9x^3)^2$ **b)** $(3x^{-5}y^4)^{-3}$

Solución

a) $(-9x^3)^2 = (-9)^2(x^3)^2 = 81x^6$

b)
$$(3x^{-5}y^4)^{-3} = 3^{-3}(x^{-5})^{-3}(y^4)^{-3} \quad \text{Regla del producto a una potencia}$$
$$= \frac{1}{3^3} \cdot x^{15} \cdot y^{-12} \quad \text{Regla del exponente negativo, regla de la potencia}$$
$$= \frac{1}{27} \cdot x^{15} \cdot \frac{1}{y^{12}} \quad \text{Regla del exponente negativo}$$
$$= \frac{x^{15}}{27y^{12}}$$

Resuelve ahora el ejercicio 93

7 Uso de la regla para elevar un cociente a una potencia

Considera la expresión $\left(\frac{x}{y}\right)^2$. Podemos simplificar esta expresión como sigue:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x \cdot x}{y \cdot y} = \frac{x^2}{y^2}$$

Esta expresión también podría simplificarse por medio de la regla para **elevar un cociente a una potencia**.

Comprendiendo el álgebra

Cuando elevamos un cociente a un exponente, escribimos el numerador elevado a ese exponente dividido entre el denominador elevado también a ese exponente.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

Elevar un cociente a una potencia

Si a y b son números reales y m es entero, entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \qquad b \neq 0$$

Para elevar un cociente a una potencia, eleva al exponente fuera del paréntesis todos los factores que están dentro del paréntesis.

EJEMPLO 9 Simplifica. **a)** $\left(\frac{5}{x^2}\right)^3$ **b)** $\left(\frac{2x^{-2}}{y^3}\right)^{-4}$

Solución

a) $\left(\frac{5}{x^2}\right)^3 = \frac{5^3}{(x^2)^3} = \frac{125}{x^6}$

b)
$$\left(\frac{2x^{-2}}{y^3}\right)^{-4} = \frac{2^{-4}(x^{-2})^{-4}}{(y^3)^{-4}}$$ Elevar un cociente a una potencia

$$= \frac{2^{-4}x^8}{y^{-12}}$$ Regla de la potencia

$$= \frac{x^8y^{12}}{2^4}$$ Regla del exponente negativo

$$= \frac{x^8y^{12}}{16}$$

Resuelve ahora el ejercicio 99

Comprendiendo el álgebra

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n = \frac{y^n}{x^n}$$

Considera $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$. Por medio de la regla para elevar un cociente a una potencia, obtenemos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Al usar este resultado, observamos que cuando tenemos un número racional elevado a un exponente negativo, podemos tomar el recíproco de la base y cambiar el signo del exponente como sigue.

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \qquad \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-4} = \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^4$$

Ahora trabajaremos algunos ejemplos que combinan varias propiedades de los números. Por lo general, siempre que la misma variable aparezca arriba y abajo de la barra de fracción, movemos la variable con el *exponente menor* al lado opuesto de la barra de fracción. Esto tendrá como resultado que el exponente de la variable sea positivo cuando se aplique la regla del producto. Los ejemplos 10 y 11 ilustran este procedimiento.

EJEMPLO 10 Simplifica. **a)** $\left(\frac{15x^2y^4}{5x^2y}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{6x^4y^{-2}}{12xy^3z^{-1}}\right)^{-3}$

Solución Las expresiones exponenciales pueden simplificarse en más de una forma. En general, es más fácil simplificar primero la expresión que está dentro de los paréntesis.

a) $\left(\frac{15x^2y^4}{5x^2y}\right)^2 = (3y^3)^2 = 9y^6$

b)
$$\left(\frac{6x^4y^{-2}}{12xy^3z^{-1}}\right)^{-3} = \left(\frac{x^4 \cdot x^{-1}z}{2y^3 \cdot y^2}\right)^{-3}$$ Mueve x, y^{-2} y z^{-1} al otro lado de la barra de fracción y cambia los signos de los exponentes.

$$= \left(\frac{x^3z}{2y^5}\right)^{-3}$$ Regla del producto

$$= \left(\frac{2y^5}{x^3z}\right)^3$$ Toma el recíproco de la expresión dentro de los paréntesis y cambia el signo del exponente.

$$= \frac{2^3y^{5\cdot3}}{x^{3\cdot3}z^3}$$ Eleva un cociente a una potencia.

$$= \frac{8y^{15}}{x^9z^3}$$

Resuelve ahora el ejercicio 109

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

EJEMPLO 11 Simplifica $\dfrac{(2p^{-3}q^5)^{-2}}{(p^{-5}q^4)^{-3}}$.

Solución Primero, utiliza la regla de la potencia. Después simplifica.

$$\frac{(2p^{-3}q^5)^{-2}}{(p^{-5}q^4)^{-3}} = \frac{2^{-2}p^6q^{-10}}{p^{15}q^{-12}}$$ Regla de la potencia

$$= \frac{q^{-10}\cdot q^{12}}{2^2p^{15}\cdot p^{-6}}$$ Mueve 2^{-2}, p^6 y q^{-12} al otro lado de la barra de fracción y cambia los signos de los exponentes.

$$= \frac{q^{-10+12}}{4p^{15-6}}$$ Regla del producto

$$= \frac{q^2}{4p^9}$$

Resuelve ahora el ejercicio 115

Resumen de las reglas de los exponentes

Para todos los números reales a y b y todos los enteros m y n:

Regla del producto	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
Regla del cociente	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,	$a \neq 0$
Regla del exponente negativo	$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$,	$a \neq 0$
Regla del exponente cero	$a^0 = 1$,	$a \neq 0$
Elevar una potencia a otra potencia	$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	
Elevar un producto a una potencia	$(ab)^m = a^m b^m$	
Elevar un cociente a una potencia	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$,	$b \neq 0$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.5

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) indicados en la siguiente lista.

aditivo	exponente cero	elevar una potencia	indefinido	elevar un producto
inverso	$\dfrac{1}{9}$	-9	cociente	$\dfrac{1}{8}$
recíproco	producto	elevar un cociente	exponente negativo	8

1. La regla $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ es llamada la regla del _____ para exponentes.

2. Para $a \neq 0$, la regla $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ es llamada la regla del _____ para exponentes.

3. Para $a \neq 0$, la regla $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ es llamada la regla del _____.

4. Para $a \neq 0$, la regla $a^0 = 1$ es llamada la regla del _____.

5. El valor de 0^0 es _____.

6. La regla $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ es llamada la regla de _____ a otra potencia.

7. La regla $(ab)^m = a^m b^m$ es llamada la regla de _____ a una potencia.

8. La regla $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ es llamada la regla de _____ a una potencia.

9. Si $x \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{x}$ es el _____ de x.

10. Si y es cualquier número real, entonces $-y$ es el _____ aditivo de y.

11. La forma simplificada de 3^{-2} es _____.

12. La forma simplificada de $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$ es _____.

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

Practica tus habilidades

Evalúa cada expresión.

13. $2^3 \cdot 2^2$ **14.** $3^2 \cdot 3^3$ **15.** $\frac{3^7}{3^5}$ **16.** $\frac{8^7}{8^6}$

17. 9^{-2} **18.** 7^{-2} **19.** $\frac{1}{5^{-3}}$ **20.** $\frac{1}{3^{-2}}$

21. 15^0 **22.** 24^0 **23.** $(2^3)^2$ **24.** $(3^2)^2$

25. $(2 \cdot 4)^2$ **26.** $(6 \cdot 5)^2$ **27.** $\left(\frac{4}{7}\right)^2$ **28.** $\left(\frac{3}{5}\right)^4$

Evalúa cada expresión.

29. **a)** 3^{-2} **b)** $(-3)^{-2}$ **c)** -3^{-2} **d)** $-(-3)^{-2}$

30. **a)** 4^{-3} **b)** $(-4)^{-3}$ **c)** -4^{-3} **d)** $-(-4)^{-3}$

31. **a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ **b)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$ **c)** $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ **d)** $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$

32. **a)** $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ **b)** $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$ **c)** $-\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ **d)** $-\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos. Considera que todas las bases representadas por variables son diferentes de cero.

33. **a)** $5x^0$ **b)** $-5x^0$ **c)** $(-5x)^0$ **d)** $-(-5x)^0$

34. **a)** $7y^0$ **b)** $(7y)^0$ **c)** $-7y^0$ **d)** $(-7y)^0$

35. **a)** $3xyz^0$ **b)** $(3xyz)^0$ **c)** $3x(yz)^0$ **d)** $3(xyz)^0$

36. **a)** $x^0 + y^0$ **b)** $(x + y)^0$ **c)** $x + y^0$ **d)** $x^0 + y$

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos.

37. $7y^{-3}$ **38.** $\frac{1}{y^{-1}}$ **39.** $\frac{9}{x^{-4}}$ **40.** $\frac{8}{5x^{-2}}$

41. $\frac{3a}{b^{-3}}$ **42.** $\frac{10x^4}{y^{-1}}$ **43.** $\frac{17m^{-2}n^{-3}}{2}$ **44.** $\frac{13x^{-3}}{z^4}$

45. $\frac{5x^{-2}y^{-3}}{z^{-4}}$ **46.** $\frac{15ab^5}{3c^{-3}}$ **47.** $\frac{9^{-1}x^{-1}}{y}$ **48.** $\frac{8^{-1}z}{x^{-1}y^{-1}}$

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos.

49. $2^5 \cdot 2^{-7}$ **50.** $a^3 \cdot a^5$ **51.** $x^6 \cdot x^{-4}$ **52.** $x^{-4} \cdot x^3$

53. $\frac{8^7}{8^5}$ **54.** $\frac{4^3}{4^{-1}}$ **55.** $\frac{7^{-5}}{7^{-3}}$ **56.** $\frac{x^{-7}}{x^4}$

57. $\frac{m^{-6}}{m^5}$ **58.** $\frac{p^0}{p^{-3}}$ **59.** $\frac{5w^{-2}}{w^{-7}}$ **60.** $\frac{x^{-7}}{x^{-9}}$

61. $3a^{-2} \cdot 4a^{-6}$ **62.** $(-8v^4)(-3v^{-5})$ **63.** $(-3p^{-2})(-p^3)$ **64.** $(2x^{-3}y^{-4})(6x^{-4}y^7)$

65. $(5r^2s^{-2})(-2r^5s^2)$ **66.** $(-6p^{-4}q^6)(2p^3q)$ **67.** $(2x^4y^7)(4x^3y^{-5})$ **68.** $\frac{27x^3y^2}{9xy}$

69. $\frac{33x^5y^{-4}}{11x^3y^2}$ **70.** $\frac{16x^{-2}y^3z^{-2}}{-2x^4y}$ **71.** $\frac{9xy^{-4}z^3}{-3x^{-2}yz}$ **72.** $\frac{(x^{-2})(4x^2)}{x^3}$

Evalúa cada expresión.

73. **a)** $4(a + b)^0$ **b)** $4a^0 + 4b^0$ **c)** $(4a + 4b)^0$ **d)** $-4a^0 + 4b^0$

74. **a)** $-3^0 + (-3)^0$ **b)** $-3^0 - (-3)^0$ **c)** $-3^0 + 3^0$ **d)** $-3^0 - 3^0$

75. **a)** $4^{-1} - 3^{-1}$ **b)** $4^{-1} + 3^{-1}$ **c)** $2 \cdot 4^{-1} + 3 \cdot 5^{-1}$ **d)** $(2 \cdot 4)^{-1} + (3 \cdot 5)^{-1}$

76. **a)** $5^{-2} + 4^{-1}$ **b)** $5^{-2} - 4^{-1}$ **c)** $3 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 4^{-1}$ **d)** $(3 \cdot 5)^{-2} - (2 \cdot 4)^{-1}$

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos.

77. $(3^2)^2$ **78.** $(5^2)^{-1}$ **79.** $(3^2)^{-2}$ **80.** $(2^2)^{-3}$

81. $(b^{-3})^{-2}$ **82.** $(-c)^4$ **83.** $(-c)^3$ **84.** $(-x)^{-4}$

85. $(-5x^{-3})^2$ **86.** $-11(x^{-3})^2$ **87.** $4^{-2} + 8^{-1}$ **88.** $5^{-1} + 2^{-1}$

89. $3 \cdot 4^{-2} + 9 \cdot 8^{-1}$ **90.** $5 \cdot 2^{-3} + 7 \cdot 4^{-2}$ **91.** $\left(\frac{4b}{3}\right)^{-2}$ **92.** $\left(\frac{2c}{5}\right)^{-3}$

93. $(4x^2y^{-2})^2$ **94.** $(4x^2y^3)^{-3}$ **95.** $(5p^2q^{-4})^{-3}$ **96.** $(8s^{-3}t^{-4})^2$

97. $(-3g^{-4}h^3)^{-3}$ **98.** $8(x^2y^{-1})^{-4}$ **99.** $\left(\frac{5j}{4k^2}\right)^2$ **100.** $\left(\frac{3x^2y^4}{z}\right)^3$

101. $\left(\frac{2r^4s^5}{r^2}\right)^3$ **102.** $\left(\frac{5m^5n^6}{10m^4n^7}\right)^3$ **103.** $\left(\frac{4xy}{y^3}\right)^{-3}$ **104.** $\left(\frac{9x^{-2}}{xy}\right)^{-2}$

105. $\left(\frac{5x^{-2}y}{x^{-5}}\right)^3$ **106.** $\left(\frac{4x^2y}{x^{-5}}\right)^{-3}$ **107.** $\left(\frac{14x^2y}{7xz}\right)^{-3}$ **108.** $\left(\frac{3xy}{z^{-2}}\right)^3$

109. $\left(\frac{x^8y^{-2}}{x^{-2}y^3}\right)^2$ **110.** $\left(\frac{x^2y^{-3}z^6}{x^{-1}y^2z^4}\right)^{-1}$ **111.** $\left(\frac{4x^{-1}y^{-2}z^3}{2xy^2z^{-3}}\right)^{-2}$ **112.** $\left(\frac{9x^4y^{-6}z^4}{3xy^{-6}z^{-2}}\right)^{-2}$

113. $\left(\frac{-a^3b^{-1}c^{-3}}{4ab^3c^{-4}}\right)^{-3}$ **114.** $\frac{(2x^{-1}y^{-2})^{-3}}{(5x^{-1}y^3)^2}$ **115.** $\frac{(3x^{-4}y^2)^3}{(2x^3y^5)^3}$ **116.** $\frac{(2xy^2z^{-3})^2}{(9x^{-1}yz^2)^{-1}}$

Resolución de problemas

Simplifica cada expresión. Considera que todas las variables representan enteros diferentes de cero.

117. $x^{2a} \cdot x^{5a+3}$ **118.** $y^{2m+3} \cdot y^{5m-7}$ **119.** $w^{2a-5} \cdot w^{3a-2}$ **120.** $d^{-4x+7} \cdot d^{5x-6}$

121. $\frac{x^{2w+3}}{x^{w-4}}$ **122.** $\frac{y^{5m-1}}{y^{7m-1}}$ **123.** $(x^{3p+5})(x^{2p-3})$ **124.** $(s^{2t-3})(s^{-t+5})$

125. $x^{-m}(x^{3m+2})$ **126.** $y^{3b+2} \cdot y^{2b+4}$ **127.** $\frac{30m^{a+b}n^{b-a}}{6m^{a-b}n^{a+b}}$ **128.** $\frac{24x^{c+3}y^{d+4}}{8x^{c-4}y^{d+6}}$

129. **a)** ¿Para qué valores de x es $x^4 > x^3$?
b) ¿Para qué valores de x es $x^4 < x^3$?
c) ¿Para qué valores de x es $x^4 = x^3$?
d) ¿Por qué no es posible decir que $x^4 > x^3$?

130. ¿Es 3^{-8} mayor o menor que 2^{-8}? Explica.

131. **a)** Explica por qué $(-1)^n = 1$ para cualquier número par n.
b) Explica por qué $(-1)^n = -1$ para cualquier número impar n.

132. **a)** Explica por qué $(-12)^{-8}$ es positivo.
b) Explica por qué $(-12)^{-7}$ es negativo.

133. **a)** ¿Es $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ igual a $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$?
b) ¿Será $(x)^{-2}$ igual a $(-x)^{-2}$ para todos los números reales x excepto el 0? Explica tu respuesta.

134. **a)** ¿Es $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ igual a $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$?
b) ¿Será $(x)^{-3}$ igual a $(-x)^{-3}$ para cualquier número real x diferente de cero? Explica.
c) ¿Cuál es la relación entre $(-x)^{-3}$ y $(x)^{-3}$ para cualquier número real x diferente de cero?

Determina cuáles exponentes deben colocarse en el área sombreada para hacer la expresión verdadera. Cada área sombreada puede representar un exponente diferente. Explica cómo determinaste tu respuesta.

135. $\left(\frac{x^2y^{-2}}{x^{-3}y^{\square}}\right)^2 = x^{10}y^2$ **136.** $\left(\frac{x^{-2}y^3z}{x^4y^{\square}z^{-3}}\right)^3 = \frac{z^{12}}{x^{18}y^6}$ **137.** $\left(\frac{x^{\square}y^5z^{-2}}{x^4y^{\square}z}\right)^{-1} = \frac{x^5z^3}{y^2}$

Problemas de desafío

En la Sección 7.2 aprenderemos que las reglas de los exponentes dadas en esta sección también se aplican cuando los exponentes son números racionales. Usando esta información y las reglas de los exponentes, evalúa cada expresión.

138. $\left(\frac{x^{1/2}}{x^{-1}}\right)^{3/2}$ **139.** $\left(\frac{x^{5/8}}{x^{1/4}}\right)^3$ **140.** $\left(\frac{x^4}{x^{-1/2}}\right)^{-1}$

141. $\frac{x^{1/2}y^{-3/2}}{x^5y^{5/3}}$ **142.** $\left(\frac{x^{1/2}y^4}{x^{-3}y^{5/2}}\right)^2$

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

Actividad de grupo

Discute y responde el ejercicio 143 en grupo.

143. Duplicando un centavo El día 1 te dan un centavo. Durante los siguientes días, te dan cada día el doble de lo que recibiste el día anterior.

a) Escribe las cantidades que recibirías cada uno de los primeros 6 días.

b) Expresa cada uno de estos números como una expresión exponencial en base 2.

c) Observando el patrón, determina una expresión exponencial para el número de centavos que recibirás el día 10.

d) Escribe una expresión exponencial general para el número de centavos que recibirás el día n.

e) Escribe una expresión exponencial para el número de centavos que recibirás el día 30.

f) Calcula el valor de la expresión del inciso **e)**. Usa una calculadora.

g) Determina la cantidad que se obtuvo en el inciso **f)** en dólares.

h) Escribe una expresión exponencial general para el número de dólares que recibirás el día n.

Ejercicios de repaso acumulados

[1.2] **144.** Si $A = \{3, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 5, 9\}$, determina

a) $A \cup B$ y

b) $A \cap B$.

145. Ilustra el siguiente conjunto en la recta numérica: $\{x|-3 \le x < 2\}$.

[1.4] **146.** Evalúa $8 + |12| \div |-3| - 4 \cdot 2^2$.

147. Evalúa $\sqrt[3]{-125}$.

1.6 Notación científica

1 Escribir números en notación científica.

2 Cambiar números en notación científica a forma decimal.

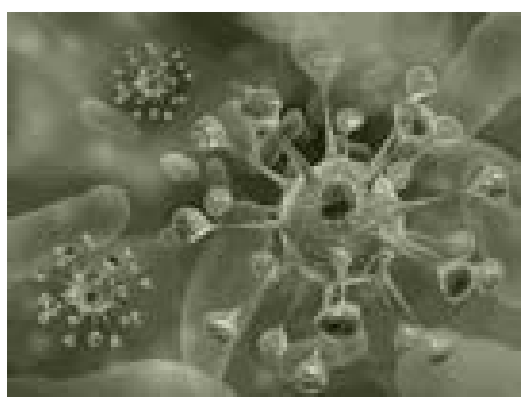
3 Usar notación científica en la resolución de problemas.

1 Escribir números en notación científica

Con frecuencia, científicos e ingenieros tratan con números muy grandes y muy pequeños. Por ejemplo, la frecuencia de la señal de una radio FM puede ser de 14,200,000,000 hertz (o ciclos por segundo) y el diámetro de un átomo de hidrógeno es de alrededor 0.0000000001 metros. Ya que es difícil trabajar con muchos ceros, los científicos suelen expresar tales números con exponentes. Por ejemplo, el número 14,200,000,000 podría escribirse como 1.42×10^{10} y 0.0000000001 como 1×10^{-10}. Los números como 1.42×10^{10} y 1×10^{-10} están en la forma conocida como **notación científica**. En notación científica, los números se expresan como $a \times 10^n$, donde $1 \le a < 10$ y n es un entero. Cuando una potencia de 10 no tiene coeficiente numérico, como en 10^5, suponemos que el coeficiente numérico es 1. Por lo tanto, 10^5 significa 1×10^5 y 10^{-4} significa 1×10^{-4}.

© X-ray:NASA/OXC/Wesleyan Univ/R.Kilgard et al;UV:NASA/JPL-Caltech; Optical: NASA/ESA/S. Beckwith&Hubble Heritage Team (STScI/AURA)IR: NASA/JPL-CALTECH/Univ. of AZ/R. Kennicutt

El diámetro de esta galaxia es alrededor de 1×10^{21} metros.



© Shutterstock

El diámetro de estos virus es alrededor de 1×10^{-7} metros.

Ejemplos de números en notación científica

3.2×10^6 4.176×10^3 2.64×10^{-2}

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

Lo siguiente muestra el número 32,400 cambiado a notación científica.

$$32{,}400 = 3.24 \times 10{,}000$$
$$= 3.24 \times 10^4 \qquad (10{,}000 = 10^4)$$

Hay cuatro ceros en 10,000, el mismo número que el exponente en 10^4. El procedimiento para escribir un número en notación científica es el siguiente.

Para escribir un número en notación científica

1. Mueve el punto decimal en el número a la derecha del primer dígito diferente de cero. Esto da un número mayor o igual a 1 y menor que 10.
2. Cuenta el número de lugares al que moviste el punto decimal en el paso 1. Si el número original es 10 o mayor, la cuenta se considera positiva. Si el número original es menor que 1, la cuenta se considera negativa.
3. Multiplica el número obtenido en el paso 1 por 10 elevado a la cuenta (potencia) que encontraste en el paso 2.

EJEMPLO 1 Escribe los siguientes números en notación científica.

a) 68,900 **b)** 0.000572 **c)** 0.0074

Solución

a) El punto decimal en 68,900 está a la derecha del último cero.

$$68{,}900. = 6.89 \times 10^4$$

El punto decimal se movió cuatro lugares. Cómo el número original es mayor que 10, el exponente es positivo.

b) $0.000572 = 5.72 \times 10^{-4}$

El punto decimal se movió cuatro lugares. Cómo el número original es menor que 1, el exponente es negativo.

c) $0.0074 = 7.4 \times 10^{-3}$

Resuelve ahora el ejercicio 11

2 Cambiar números en notación científica a forma decimal

En ocasiones, puedes necesitar convertir un número escrito en notación científica a su forma decimal. El procedimiento es como sigue.

Para convertir un número en notación científica a su forma decimal

1. Observa el exponente en la base 10.
2. **a)** Si el exponente es positivo, mueve el punto decimal en el número hacia la derecha el mismo número de lugares que el exponente. Puede ser necesario agregar ceros al número. Esto tendrá como resultado un número mayor o igual a 10.
   b) Si el exponente es 0, el punto decimal en el número no se mueve de su posición actual. Quita el factor 10^0. Esto resultará en un número mayor o igual a 1 pero menor que 10.
   c) Si el exponente es negativo, mueve el punto decimal en el número hacia la izquierda el mismo número de lugares que el exponente. Puede ser necesario agregar ceros. Esto resultará en un número menor que 1.

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

EJEMPLO 2 Escribe los números siguientes sin exponentes.

a) 2.1×10^4 **b)** 8.73×10^{-3} **c)** 1.45×10^8

Solución

a) Mueve el punto decimal cuatro lugares hacia la derecha.

$$2.1 \times 10^4 = 2.1 \times 10{,}000 = 21{,}000$$

b) Mueve el punto decimal tres lugares hacia la izquierda.

$$8.73 \times 10^{-3} = 0.00873$$

c) Mueve el punto decimal ocho lugares hacia la derecha.

$$1.45 \times 10^8 = 145{,}000{,}000$$

Resuelve ahora el ejercicio 25

3 Usar notación científica en la resolución de problemas

Podemos utilizar las reglas de los exponentes cuando trabajamos con números escritos en notación científica, como se ilustra en las aplicaciones siguientes.

EJEMPLO 3 **Deuda pública por persona** La deuda pública es el monto total que el gobierno federal de Estados Unidos adeuda a prestadores en la forma de bonos del gobierno. El 20 de julio de 2008, la deuda pública de Estados Unidos era aproximadamente \$9,525,000,000,000 (9 billones 525 mil millones de dólares). La población de Estados Unidos en esa fecha era de alrededor 305,000,000.

a) Determina la deuda promedio por persona de Estados Unidos (deuda per cápita).

b) El 1 de julio de 1982, la deuda de Estados Unidos fue de alrededor de \$1,142,000,000,000. ¿Cuán mayor fue la deuda en 2008 que en 1982?

c) ¿Cuántas veces fue mayor la deuda en 2008 que en 1982?

Solución

a) Para determinar la deuda per cápita, dividimos la deuda pública entre la población.

$$\frac{9{,}525{,}000{,}000{,}000}{305{,}000{,}000} = \frac{9.525 \times 10^{12}}{3.05 \times 10^8} \approx 3.12 \times 10^{12-8} \approx 3.12 \times 10^4 \approx 31{,}200$$

Por lo tanto, la deuda per cápita fue de casi \$31,200. Esto significa que si los ciudadanos de Estados Unidos desearan "compartir los gastos" y saldar la deuda federal, les tocaría alrededor de \$31,200 a cada hombre, mujer y niño de Estados Unidos.

b) Necesitamos encontrar la diferencia en la deuda entre 2008 y 1982.

$$\begin{aligned} 9{,}525{,}000{,}000{,}000 - 1{,}142{,}000{,}000{,}000 &= 9.525 \times 10^{12} - 1.142 \times 10^{12} \\ &= (9.525 - 1.142) \times 10^{12} \\ &= 8.383 \times 10^{12} \\ &= 8{,}383{,}000{,}000{,}000 \end{aligned}$$

La deuda pública de Estados Unidos fue \$8,383,000,000,000 mayor en 2008 que en 1982.

c) Para determinar cuántas veces fue mayor la deuda pública en 2008, dividimos la deuda de 2008 entre la deuda de 1982 como sigue:

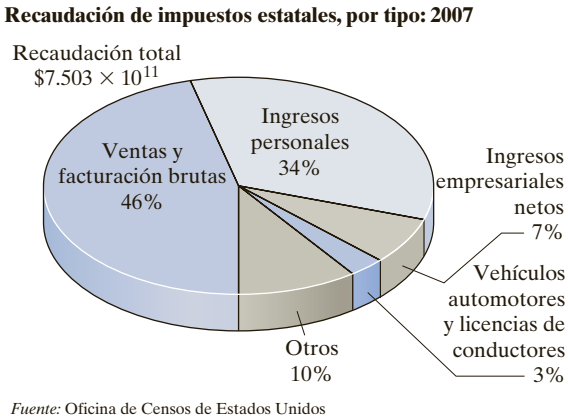
$$\frac{9{,}525{,}000{,}000{,}000}{1{,}142{,}000{,}000{,}000} = \frac{9.525 \times 10^{12}}{1.142 \times 10^{12}} \approx 8.34$$

Por lo tanto, la deuda pública de 2008 fue casi 8.34 veces mayor que en 1982.

Resuelve ahora el ejercicio 87

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

EJEMPLO 4 **Recaudación de impuestos** Los datos para la gráfica en la **Figura 1.9** se tomaron del Sitio Web de la Oficina de Censos de Estados Unidos. La gráfica muestra la recaudación estatal acumulada de impuestos en 2007. Hemos dado los montos recolectados en notación científica.



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos

FIGURA 1.9

a) Determina, usando notación científica, cuánto dinero se recolectó en impuestos sobre percepciones personales en 2007.

b) Determina, usando notación científica, cuánto dinero más se recaudó en impuestos a ventas y facturación brutas que en impuestos por ingresos empresariales netos.

Solución

a) En 2007, 34% de los $\$7.503 \times 10^{11}$ se recaudaron de impuestos en percepciones personales. En forma decimal, 34% es 0.34, y en notación científica 34% es 3.4×10^{-1}. Para determinar 34% de $\$7.503 \times 10^{11}$, multiplicamos usando la notación científica como sigue.

$$\begin{aligned}\text{Recaudación de impuestos en percepciones personales} &= (3.4 \times 10^{-1})(7.503 \times 10^{11}) \\ &= (3.4 \times 7.503)(10^{-1} \times 10^{11}) \\ &= 25.5102 \times 10^{-1+11} \\ &= 25.5102 \times 10^{10} \\ &= 2.55102 \times 10^{11}\end{aligned}$$

Por lo tanto, en 2007 se recaudaron alrededor de $\$2.55102 \times 10^{11}$ o \$255,102,000,000 por percepciones personales.

b) En 2007 se recolectaron 46% de ventas y facturación brutas y 7% de impuestos a ingresos netos empresariales. Para determinar cuánto dinero más se recaudó de ventas y facturación brutas que de impuestos a ingresos netos empresariales, primero determinamos la diferencia entre los dos porcentajes.

$$\text{diferencia} = 46\% - 7\% = 39\%$$

Para determinar 39% de $\$7.503 \times 10^{11}$, cambiamos 39% a notación científica y después multiplicamos.

$$39\% = 0.39 = 3.9 \times 10^{-1}$$

$$\begin{aligned}\text{Diferencia en recaudación de impuestos} &= (3.9 \times 10^{-1})(7.503 \times 10^{11}) \\ &= (3.9 \times 7.503)(10^{-1} \times 10^{11}) \\ &= 29.2617 \times 10^{10} \\ &= 2.92617 \times 10^{11}\end{aligned}$$

Por lo tanto, se recaudó $\$2.92617 \times 10^{11}$ o \$292,617,000,000 más de dinero en impuestos a ventas y facturación brutas que de impuestos a ingresos netos empresariales.

Resuelve ahora el ejercicio 95

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

Cómo utilizar tu calculadora

En una calculadora científica o graficadora el producto (8,000,000)(400,000) podría mostrarse como 3.2^{12} o 3.2E12. Ambos representan 3.2×10^{12}, o sea, 3,200,000,000,000.

Para introducir números en notación científica en una calculadora científica o graficadora, por lo común se utilizan las teclas [EE] o [EXP].

Para introducir 4.6×10^8, debes presionar 4.6 [EE] 8 o 4.6 [EXP] 8. La pantalla de tu calculadora podría mostrar 4.6^{08} o bien 4.6E8.

En la TI-84 Plus aparece EE debajo de la tecla [,] Por lo tanto, para introducir (8,000,000)(400,000) en notación científica deberás presionar

8 [2nd] [,] 6 [×] 4 [2nd] [,] 5 [ENTER] 3.2E12

(2nd [,] para obtener EE; 2nd [,] para obtener EE; 3.2E12 respuesta mostrada)

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.6

Ejercicios de práctica

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) indicados en la siguiente lista.

Positivo negativo 1 5 notación científica 2 4 3 0

1. Un número escrito como $a \times 10_n$, donde $1 \le a < 10$ y n es un entero, está escrito en _____.

2. Cuando un número mayor que 10 está escrito en notación científica, el valor para n en 10^n es un entero _____.

3. Para escribir 0.00329 en notación científica, desplaza el punto decimal _____ lugares a la derecha.

4. Para escribir 75,618 en notación científica, desplaza el punto decimal _____ lugares a la izquierda.

Practica tus habilidades

Expresa cada número en notación científica.

5. 3700 **6.** 860 **7.** 0.043 **8.** 0.000000918

9. 760,000 **10.** 9,260,000,000 **11.** 0.00000186 **12.** 0.00000914

13. 5,780,000 **14.** 0.0000723 **15.** 0.000106 **16.** 952,000,000

Expresa cada número sin exponentes.

17. 3.1×10^4 **18.** 5×10^8 **19.** 2.13×10^{-5} **20.** 6.78×10^{-5}

21. 9.17×10^{-1} **22.** 5.4×10^1 **23.** 3.0×10^6 **24.** 7.6×10^4

25. 2.03×10^5 **26.** 9.25×10^{-6} **27.** 1×10^6 **28.** 1×10^{-8}

Expresa cada valor sin exponentes.

29. $(4 \times 10^5)(6 \times 10^2)$ **30.** $(7.6 \times 10^{-3})(1.2 \times 10^{-1})$ **31.** $\dfrac{8.4 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-4}}$

32. $\dfrac{8.5 \times 10^3}{1.7 \times 10^{-2}}$ **33.** $\dfrac{9.45 \times 10^{-3}}{3.5 \times 10^2}$ **34.** $(5.2 \times 10^{-3})(4.1 \times 10^5)$

35. $(8.2 \times 10^5)(1.4 \times 10^{-2})$ **36.** $(6.3 \times 10^4)(3.7 \times 10^{-8})$ **37.** $\dfrac{1.68 \times 10^4}{5.6 \times 10^7}$

38. $\dfrac{7.2 \times 10^{-2}}{3.6 \times 10^{-6}}$ **39.** $(9.1 \times 10^{-4})(7.4 \times 10^{-4})$ **40.** $\dfrac{8.6 \times 10^{-8}}{4.3 \times 10^{-6}}$

Expresa cada valor en notación científica.

41. (0.03)(0.0005) **42.** (2500)(7000) **43.** $\dfrac{35{,}000{,}000}{7000}$

44. $\dfrac{560{,}000}{0.0008}$ **45.** $\dfrac{0.00069}{23{,}000}$ **46.** $\dfrac{0.000018}{0.000009}$

47. (47,000)(35,000,000) **48.** $\dfrac{0.0000286}{0.00143}$ **49.** $\dfrac{2016}{0.0021}$

50. $\dfrac{0.018}{160}$ **51.** $\dfrac{0.00153}{0.00051}$ **52.** (0.0015)(0.00038)

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

Expresa cada valor en notación científica. Redondea los números decimales a la milésima cifra.

53. $(4.78 \times 10^{9})(1.96 \times 10^{5})$

54. $\dfrac{5.55 \times 10^{3}}{1.11 \times 10^{1}}$

55. $(7.23 \times 10^{-3})(1.46 \times 10^{5})$

56. $(5.71 \times 10^{5})(4.7 \times 10^{-3})$

57. $\dfrac{4.36 \times 10^{-4}}{8.17 \times 10^{-7}}$

58. $\dfrac{9.675 \times 10^{25}}{3.225 \times 10^{15}}$

59. $(4.89 \times 10^{15})(6.37 \times 10^{-41})$

60. $(4.36 \times 10^{-6})(1.07 \times 10^{-6})$

61. $(4.16 \times 10^{3})(9.14 \times 10^{-31})$

62. $\dfrac{3.71 \times 10^{11}}{4.72 \times 10^{-9}}$

63. $\dfrac{1.5 \times 10^{35}}{4.5 \times 10^{-26}}$

64. $(4.9 \times 10^{5})(1.347 \times 10^{31})$

Notación científica *En los ejercicios 65-78, cada número en itálicas escríbelo en notación científica.*

65. A la NASA le costó más de *$850 millones* enviar a los exploradores *Spirit* y *Opportunity* a Marte.

© NASA/Jet Propulsion Laboratoy

66. La distancia entre el Sol y la Tierra es aproximadamente de *93 millones* de millas.

67. El costo promedio por un anuncio publicitario de 30 segundos en el Super Bowl XLI fue de *$2.7 millones*.

68. De acuerdo con la Oficina de Censos de Estados Unidos, la población mundial en 2050 será de *9.2 billones* de personas.

69. De acuerdo con el *World Almanac and Fact Book* de 2008, el hombre más rico del mundo es Warren Buffet de Berkshire Hathaway, que se calcula tiene *$62 billones*.

70. El presupuesto federal de Estados Unidos en 2006 era aproximadamente de *$2.56 trillones*.

71. En 2008, la deuda de Estados Unidos era aproximadamente de *$9.5 trillones*.

72. La velocidad de la luz es aproximadamente de *186,000* millas por segundo.

73. Un centímetro = *0.001* hectómetros.

74. Un milímetro = *0.000001* kilómetros.

75. Una pulgada ≈ *0.0000158* millas.

76. Una onza ≈ *0.00003125* toneladas.

77. Un miligramo = *0.000000001* toneladas métricas.

78. Una determinada computadora puede realizar un cálculo en *0.0000001* segundos.

Resolución de problemas

79. Explica cómo puedes dividir rápidamente un número dado en notación científica entre

a) 10,

b) 100,

c) 1 millón.

d) Divide 6.58×10^{-4} entre 1 millón. Escribe tu respuesta en notación científica.

80. Explica cómo puedes multiplicar rápidamente un número dado en notación científica por

a) 10,

b) 100,

c) 1 millón.

d) Multiplica 7.59×10^{7} entre 1 millón. Escribe tu respuesta en notación científica.

81. Experimento científico Durante un experimento científico encontraste que la respuesta correcta es 5.25×10^{4}.

a) Si por error escribes como respuesta 4.25×10^{4}, ¿qué tanto te alejaste de la respuesta correcta?

b) Si por error escribes como respuesta 5.25×10^{5}, ¿qué tanto te alejaste de la respuesta correcta?

c) ¿Cuál de los dos errores es el que más se aleja de la respuesta correcta? Explica.

82. Orbita de la Tierra

a) La Tierra completa sus 5.85×10^{8} millas de orbita alrededor del Sol en 365 días. Determina la distancia recorrida por día.

b) La velocidad de la Tierra es aproximadamente ocho veces más rápida que la de una bala. Estima la velocidad de una bala en millas por hora.

© Trinacria Photo\Shutterstock

83. Distancia al Sol La distancia de la Tierra al Sol es de 93,000,000 millas. Si una nave espacial viaja a una velocidad de 3100 millas por hora, ¿cuánto se tardará en llegar al Sol?

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

84. Universo Existe evidencia de que hay al menos 1 sextillón, 10^{21}, de estrellas en el universo.

a) Escribe ese número sin exponentes.

b) ¿Cuántas estrellas son en millones? Explica cómo determinaste tu respuesta.

85. Población de Estados Unidos y del mundo El 20 de julio de 2008, la población de Estados Unidos era de 3.046×10^8. Ese mismo día, la población del mundo era aproximadamente de 6.711×10^9.

Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos

a) ¿Cuántas personas vivían fuera de Estados Unidos en 2008?

b) ¿Qué porcentaje de la población mundial vivía en Estados Unidos en 2008?

86. Puente New River Gorge El puente New River Gorge, que se muestra en la fotografía, tiene una longitud de 3030.5 pies. Fue completado en 1977 cerca de Fayetteville, West Virginia, y es el arco de acero más largo del mundo. Su peso total es de 8.80×10^7 libras y su pieza más pesada es de 1.84×10^5 libras.

a) ¿Cuántas veces es mayor el peso total del puente que el peso de su pieza más pesada?

b) ¿Cuál es la diferencia de pesos entre el peso total del puente y el peso de su pieza más pesada?

© Allen R. Angel

87. Producto Interno Bruto El Producto Interno Bruto (PIB) es una medida de la actividad económica. EL PIB es la cantidad total de bienes y servicios producidos por un país durante un año. En 2007, el PIB de Estados Unidos era aproximadamente de $11.750 trillones y la población de Estados Unidos era aproximadamente de 302.2 millones.

Fuente: Sitio Web de Tesorería de Estados Unidos

a) Escribe cada uno de estos dos números en notación científica.

b) Determina el PIB *per cápita* dividiendo el PIB entre la población de Estados Unidos.

88. Producto Interno Bruto En 2007, el PIB (ver ejercicio 87) del mundo era aproximadamente de $55.500 trillones y la población mundial era aproximadamente de 6.6 billones de personas.

Fuente: Sitio Web de Tesorería de Estados Unidos y www.en.wikipedia.org/wiki

a) Escribe cada uno de estos dos números en notación científica.

b) Determina el PIB *per cápita* dividiendo el PIB entre la población mundial.

89. Densidad de población La densidad de población (personas por kilómetro cuadrado) se determina dividiendo la población de un país entre su área territorial. Determina la densidad de población de China si su población en 2008 era de 1.32×10^9 personas y si el área territorial era de 9.8×10^6 kilómetros cuadrados. (Redondea tu respuesta a la unidad más cercana).

90. Densidad de población Determina la densidad de población (ver ejercicio 89) de India si su población en 2008 era de 11.3×10^9 personas y si el área territorial era de 3.2×10^6 kilómetros cuadrados. (Redondea tu respuesta a la unidad más cercana).

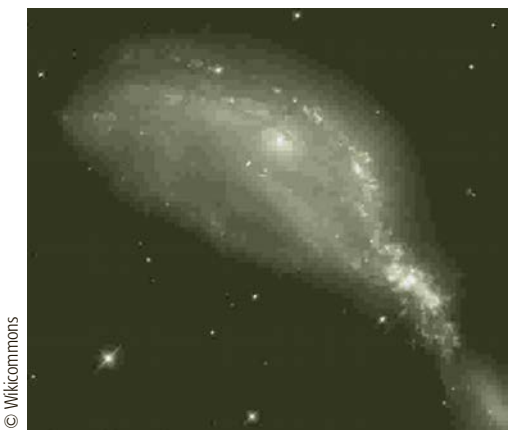
91. Reciclaje de plástico En Estados Unidos solo cerca de 5% de las 4.2×10^9 libras de plástico usado se recicla anualmente.

a) ¿Cuántas libras se reciclan al año?

b) Cuántas libras no se reciclan en un año?

92. Distancia a Próxima Centauri La distancia de la Tierra al Sol es aproximadamente de 150 millones de kilómetros. La siguiente estrella más cercana a la Tierra es Próxima Centauri, la cual está 268,000 veces más lejos de la Tierra de lo que está el Sol. Aproxima la distancia de Próxima Centauri a la Tierra. Escribe tu respuesta en notación científica.

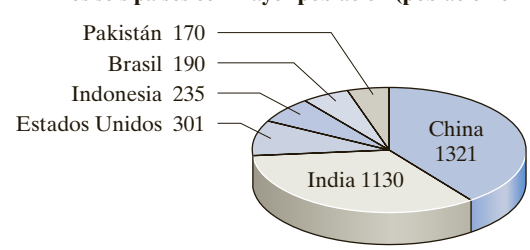
Fuente: Sitio Web de la NASA


© Wikicommons

Próxima Centauri

93. Países con mayor población En 2007, los seis países con mayor población eran representados por 3,347,000,000 personas del total de la población mundial de 6,600,000,000. los seis países con mayor población de 2007 se muestran en la siguiente gráfica, cada uno con su respectiva población.

Los seis países con mayor población (población en millones)



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos.
Nota: China incluye a China continental y a Taiwán.

a) ¿Cuántas personas más vivían en China que en Estados Unidos?

b) ¿Qué porcentaje de la población mundial vivía en China?

c) Si el área de China es de 3.70×10^6 millas cuadradas, determina la densidad de población de China (personas por milla cuadrada).

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

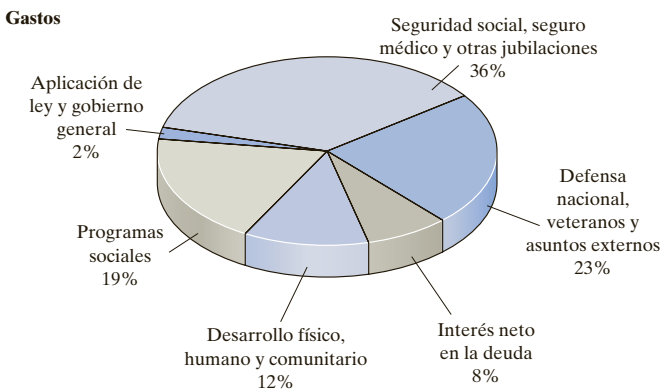
d) Si el área de Estados Unidos es de 3.62×10^6 millas cuadradas, determina la densidad de población en Estados Unidos.*

94. Población mundial Se necesitó de toda la historia del hombre para que la población mundial llegara a 6.711×10^9 personas en el año 2008. Al ritmo actual, la población mundial se duplicará en aproximadamente 62 años.

a) Estima la población mundial en 2070.

b) Suponiendo que un año tiene 365 días, estima el número promedio de personas adicionales que se incorporarán a la población mundial cada día entre 2008 y 2070.

95. Gastos federales La siguiente gráfica aparece en la página 86 del manual de impuestos Internal Revenue Service Form 1040, de 2007. La gráfica muestra la distribución de gastos del gobierno federal en el Año Fiscal (AF) 2006. El total de gastos del gobierno federal en AF 2006 fue de $\$2.655 \times 10^{12}$.



Usa esta gráfica de pastel para responder las siguientes preguntas. Escribe todas las respuestas en notación científica.

a) ¿Cuál fue la deuda en el AF 2006 para la aplicación de ley y gobierno general?

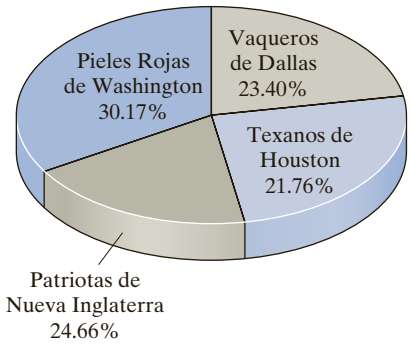
b) ¿Cuál fue la deuda en el AF 2006 para la seguridad social, seguro médico y otras jubilaciones?

c) ¿Cuál fue la deuda en el AF 2006 para todos los programas con excepción del interés neto en la deuda?

96. Ingresos del futbol americano en la NFL En 2007, los 32 equipos profesionales de futbol americano en la NFL generaron más de $5 billones en ingresos. Los cuatro equipos que generaron más ingresos fueron los Pieles Rojas de Washington, los Vaqueros de Dallas, los patriotas de Nueva Inglaterra, y los Texanos de Houston. El ingreso total de estos cuatro equipos fue de $\$1.034 \times 10^9$. La gráfica muestra el porcentaje de distribución de los $\$1.034 \times 10^9$ de estos cuatro equipos.

Usa esta gráfica para responder las siguientes preguntas.

Los cuatro equipos de la NFL que generan los mayores ingresos, (en total $\$1.034 \times 10^9$)



Fuente: NFL.

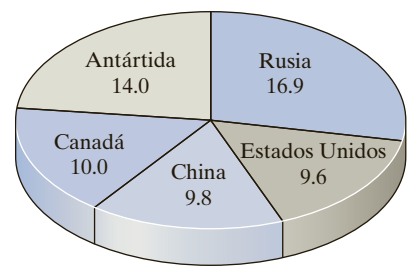
a) Determina los ingresos de los Vaqueros de Dallas y de los Texanos de Houston. Expresa tu respuesta en notación científica.

b) ¿Cuál es la diferencia de ingresos entre los Vaqueros de Dallas y los Texanos de Houston?

c) Si el total de ingresos de los 32 equipos fue de $5 billones en 2007, ¿qué porcentaje del total de ingresos representan estos cuatro equipos? Expresa tu respuesta en notación científica.

97. Área territorial El área territorial, en kilómetros cuadrados, de los cinco países más grandes en el mundo se muestra en la siguiente gráfica.

Área territorial (en millones de kilómetros cuadrados) de los cinco países más grandes



Fuente: www.world-gazetteer.com

a) ¿Cuál es el total del área territorial de los cinco países más grandes? Escribe tu respuesta en notación científica.

b) ¿Cuánta área territorial tiene de más Antártida que Estados Unidos? Escribe tu respuesta en notación científica.

*A partir de junio de 2008, la región con la mayor densidad de población era Macau (China), con una densidad de población de 48,459 personas por milla cuadrada. El país con la mayor densidad de población era Mónaco, con una densidad de población de 42,689 personas por milla cuadrada.

Material seleccionado por Mg. Ana Rubio Duca y Prof. Analía V. Gimenez

Conjunto de ejercicios 1.5

1. Producto **3.** Exponente negativo **5.** Indefinido **7.** Elevar un producto **9.** Recíproco **11.** $\frac{1}{9}$ **13.** 32 **15.** 9 **17.** $\frac{1}{81}$ **19.** 125 **21.** 1 **23.** 64 **25.** 64 **27.** $\frac{16}{49}$ **29. a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{1}{9}$ **c)** $-\frac{1}{9}$ **d)** $-\frac{1}{9}$ **31. a)** 2 **b)** -2 **c)** -2 **d)** 2 **33. a)** 5 **b)** -5 **c)** 1 **d)** -1 **35. a)** $3xy$ **b)** 1 **c)** $3x$ **d)** 3 **37.** $\frac{7}{y^3}$ **39.** $9x^4$ **41.** $3ab^3$ **43.** $\frac{17}{2m^2n^3}$ **45.** $\frac{5z^4}{x^2y^3}$ **47.** $\frac{1}{9xy}$ **49.** $\frac{1}{4}$ **51.** x^2 **53.** 64 **55.** $\frac{1}{49}$ **57.** $\frac{1}{m^{11}}$ **59.** $5w^5$ **61.** $\frac{12}{a^8}$ **63.** $3p$ **65.** $-10r^7$ **67.** $8x^7y^2$ **69.** $\frac{3x^2}{y^6}$ **71.** $-\frac{3x^3z^2}{y^5}$ **73. a)** 4 **b)** 8 **c)** 1 **d)** 0 **75. a)** $-\frac{1}{12}$ **b)** $\frac{7}{12}$ **c)** $\frac{11}{10}$ **d)** $\frac{23}{120}$ **77.** 81 **79.** $\frac{1}{81}$ **81.** b^6 **83.** $-c^3$ **85.** $\frac{25}{x^6}$ **87.** $\frac{3}{16}$ **89.** $\frac{21}{16}$ **91.** $\frac{9}{16b^2}$ **93.** $\frac{16x^4}{y^4}$ **95.** $\frac{q^{12}}{125p^6}$ **97.** $-\frac{g^{12}}{27h^9}$ **99.** $\frac{25j^2}{16k^4}$ **101.** $8r^6s^{15}$ **103.** $\frac{y^6}{64x^3}$ **105.** $125x^9y^3$ **107.** $\frac{z^3}{8x^3y^3}$ **109.** $\frac{x^{20}}{y^{10}}$ **111.** $\frac{x^4y^8}{4z^{12}}$ **113.** $-\frac{64b^{12}}{a^6c^3}$ **115.** $\frac{27}{8x^{21}y^9}$ **117.** x^{7a+3} **119.** w^{5a-7} **121.** x^{w+7} **123.** x^{5p+2} **125.** x^{2m+2} **127.** $\frac{5m^{2b}}{n^{2a}}$ **129. a)** $x < 0$ o $x > 1$ **b)** $0 < x < 1$ **c)** $x = 0$ o $x = 1$ **d)** No verdadero para $0 \le x \le 1$ **131. a)** El producto de un número par de factores negativos es positivo. **b)** El producto de un número impar de factores negativos es negativo. **133. a)** Sí **b)** Sí, porque $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ y $(-x)^{-2} = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$ **135.** -3, porque $\left(\frac{y^{-2}}{y^{-3}}\right)^2 = y^2$ **137.** $-1,3$, porque $\left(\frac{x^{-1}}{x^4}\right)^{-1} = x^5$, y $\left(\frac{y^5}{y^3}\right)^{-1} = \frac{1}{y^2}$ **139.** $x^{9/8}$ **141.** $\frac{1}{x^{9/2}y^{19/6}}$ **144. a)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ **b)** $A \cap B = \{\ \}$ **145.** **146.** -4 **147.** -5

Conjunto de ejercicios 1.6

1. Notación científica **3.** 3 **5.** 3.7×10^3 **7.** 4.3×10^{-2} **9.** 7.6×10^5 **11.** 1.86×10^{-6} **13.** 5.78×10^6 **15.** 1.06×10^{-4} **17.** 31,000 **19.** 0.0000213 **21.** 0.917 **23.** 3,000,000 **25.** 203,000 **27.** 1,000,000 **29.** 240,000,000 **31.** 0.021 **33.** 0.000027 **35.** 11,480 **37.** 0.0003 **39.** 0.0000006734 **41.** 1.5×10^{-5} **43.** 5.0×10^3 **45.** 3.0×10^{-8} **47.** 1.645×10^{12} **49.** 9.6×10^5 **51.** 3.0×10^0 **53.** 9.369×10^{14} **55.** 1.056×10^3 **57.** 5.337×10^2 **59.** 3.115×10^{-25} **61.** 3.802×10^{-27} **63.** 3.333×10^{60} **65.** 8.5×10^8 **67.** 2.7×10^6 **69.** 6.2×10^{10} **71.** 9.5×10^{12} **73.** 1.0×10^{-4} **75.** 1.58×10^{-5} **77.** 1.0×10^{-9} **79. a)** Resta 1 del exponente. **b)** Resta 2 del exponente. **c)** Resta 6 del exponente. **d)** 6.58×10^{-10} **81. a)** 1.0×10^4 o 10,000 **b)** 4.725×10^5 o 472,500 **c)** El error en parte **b)** porque la respuesta se redondea en más. **83.** 30,000 horas **85. a)** $\approx 6.406 \times 10^9$ personas **b)** $\approx 4.539\%$ **87. a)** $1.1750 \times 10^{13}, 3.022 \times 10^8$ **b)** $\approx \$38{,}881.54$ **89.** 135 personas/kilómetro cuadrado **91. a)** 2.1 × 108 libras **b)** 3.99 × 109 libras **93. a)** 1020 millones **b)** $\approx 20.20\%$ **c)** ≈ 357 personas/milla cuadrada

LOGARITMOS

Cuando tenemos tres números $a, b, x \in \mathbb{R}$ relacionados en una expresión de la forma

$$a^x = b, \qquad con\ a > 0, a \neq 1, b > 0$$

dados dos de ellos, podemos encontrar el tercero, es decir:

- dados $a = 2 \;\; x = 3$ calculamos $b = 2^3 = 8$
- dados $b = 36 \;\; x = 2$ calculamos $a = \sqrt{36} = 6$

y si los datos son $a = 5 \;\; y \;\; b = 125$ ¿Cómo calculamos x?, es decir: $5^x = 125$.

La respuesta nos la da el **logaritmo:**

Definición: Sea a un número positivo con $a \neq 1$. El logaritmo con base a se denota por $\log_a$, y se define:

$$\log_a b = x \quad si\ y\ solo\ si\ \ a^x = b$$

Así, $\log_a b$ es el **exponente** al que hay que elevar la base a para obtener x.

Cuando se usa la definición de logaritmos para intercambiar entre la fórmula logarítmica

$$\log_a b = x$$

y la fórmula exponencial

$$a^x = b$$

es útil observar que en ambas formas la *base* es la misma:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_{\underbrace{a}_{base}} b = \overbrace{x}^{exponente}$	$\underbrace{a}_{base}{}^{\overbrace{x}^{exponente}} = b$

Las formas logarítmica y exponencial son ecuaciones equivalentes, si una es cierta entonces la otra también lo es. Por lo tanto se puede intercambiar de una forma a la otra.

- **Ejemplo 1**: Emplea la definición de logaritmo para transformar las siguientes expresiones en su forma exponencial:

Forma logarítmica	Forma exponencial
1. $\log_3 243 = 5$	$243 = 3^5$
2. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = 6$	$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

3. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ $\quad 2^{-3} = \frac{1}{8}$
4. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

❖ **Ejemplo 2:** Transforma las siguientes expresiones exponenciales en expresiones logarítmicas:

Forma exponencial	Forma logarítmica
1. $N = \left(\sqrt{2}\right)^3$	$\log_{\sqrt{2}} N = 3$
2. $\frac{1}{125} = 5^{-3}$	$\log_5 \frac{1}{125} = -3$
3. $\left(\sqrt{5}\right)^4 = 25$	$\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$
4. $x^p = y$	$\log_x y = p$

Ejercicios propuestos

1) Convierte a su forma exponencial los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 8 = 3$ b) $\log_x 16 = 4$ c) $\log_3 81 = 4$ d) $\log_6 \frac{1}{36} = -2$

e) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$ f) $\log_7 343 = x$ g) $\log_a \sqrt{6} = \frac{1}{2}$ h) $\log_3 (x-1) = 2$

i) $\log_w 625 = 4$ j) $\log_{(x-1)} 128 = 7$ k) $\log_{3x} 243 = 5$ l) $\log_{(2x-1)} 256 = 8$

2) Transforma a su forma logarítmica las siguientes expresiones:

a) $17^2 = a$ b) $625 = 5^4$ c) $64^{\frac{1}{3}} = 4$ d) $\frac{1}{16} = N^2$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ f) $(x+3) = 2^4$ g) $2^x = 256$ h) $(x-2)^3 = 8$

i) $x^w = z$ j) $\frac{1}{81} = 3^{-4}$ k) $5^{-3x} = 125$ l) $441 = (3x+1)^2$

Aplicación de la definición de logaritmo

En los siguientes ejemplos se aplica la definición de logaritmo para encontrar el valor de la incógnita.

❖ **Ejemplo 3**: Encuentra el valor de a en la expresión: $\log_a 216 = 3$.

Solución:

Se escribe el logaritmo en su forma exponencial y se despeja la incógnita:

$$\log_a 216 = 3 \quad \rightarrow \quad 216 = a^3 \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{216} = a \quad \rightarrow \quad 6 = a$$

Por consiguiente, el resultado es: $a = 6$

❖ **Ejemplo 4**: Encuentra el valor de m en $\log_{\sqrt{2}} m = 3$.

Solución:

Se transforma a la forma exponencial la expresión y se desarrolla el exponente:

$$\log_{\sqrt{2}} m = 3 \quad \rightarrow \quad m = \left(\sqrt{2}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Por lo tanto, el resultado es $m = 2\sqrt{2}$

❖ **Ejemplo 5:** Determina el valor de x en la expresión: $\log_3 \frac{1}{729} = x$.

Solución:

La expresión se transforma a la forma exponencial.

$$\log_3 \frac{1}{729} = x \qquad \rightarrow \qquad 3^x = \frac{1}{729}$$

El número 729 se descompone en factores primos y la ecuación se expresa como:

$$3^x = \frac{1}{729} \quad \rightarrow \quad 3^x = \frac{1}{3^6} \quad \rightarrow \quad 3^x = 3^{-6}$$

De la última igualdad se obtiene: $x = -6$

<u>Ejercicios propuestos</u>

3) Encuentra el valor de las incógnitas en las siguientes expresiones:

a) $\log_x 25 = 2$	b) $\log_x 64 = 3$	c) $\log_y 81 = 4$	d) $\log_b 3125 = -5$
e) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$	f) $\log_a 49 = \frac{2}{3}$	g) $\log_3 x = 4$	h) $\log_2 m = 3$
i) $\log_{0,5} y = 5$	j) $\log_4 N = \frac{3}{2}$	k) $\log_{27} w = \frac{1}{3}$	l) $\log_{\frac{3}{2}} x = -2$
m) $\log_{32} b = 0{,}2$	n) $\log_8 x = 0{,}333\ldots$	o) $\log_6 216 = x$	p) $\log_{32} \frac{1}{4} = a$
q) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = x$	r) $\log_{16} 0{,}5 = y$	s) $\log_{\frac{1}{8}} 512 = x$	t) $\log_3 -9 = x$

Propiedades

Los logaritmos tienen unas propiedades muy útiles que se pueden deducir en forma directa de la definición y de las leyes de los exponentes.

Primeras propiedades:

1) $\log_a 1 = 0$	*porque*	se debe elevar a a la potencia 0 para obtener 1
2) $\log_a a = 1$	*porque*	se debe elevar a a la potencia 1 para obtener a
3) $\log_a a^x = x$	*porque*	se debe elevar a a la potencia x para obtener a^x
4) $a^{\log_a b} = b$	*porque*	$\log_a b$ es la potencia a la cual se debe elevar a para obtener b.

❖ **Ejemplo 6**:

$\log_5 1 = 0$	*pues*	$5^0 = 1$
$\log_5 5 = 1$	*pues*	$5^1 = 5$
$\log_5 5^8 = 8$	*pues*	$5^8 = 5^8$
$5^{\log_5 12} = 12$	*pues*	$\log_5 12$ es el exponente al que debo elevar 5 para que me de 12

Ejercicios propuestos

4) Utiliza las propiedades de los logaritmos para resolver y justificar:

a) $\log_4 1 =$	por propiedad ___
b) $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} =$	por propiedad ___
c) $6^{\log_6 20} =$	por propiedad ___
d) $2^{\log_2 \pi} =$	por propiedad ___
e) $\log_{16} 16^{1/2} =$	por propiedad ___

Definición: El logaritmo con base 10 se llama *logaritmo decimal*, común o de Briggs. Y se denota omitiendo la base

$$\log_{10} x = \log x$$

Definición: El logaritmo con base *e* se llama *logaritmo natural*, y se denota por ln:

$$\ln x = \log_e x$$

$$\ln x = y \quad \leftrightarrow \quad e^y = x$$

Reescribamos las propiedades vistas hasta ahora para los logaritmos naturales

Propiedad 1	$\ln 1 = 0$
Propiedad 2	$\ln e = 1$
Propiedad 3	$\ln e^x = x$
Propiedad 4	$e^{\ln x} = x$

Resto de las propiedades:

En las siguientes propiedades M, N, a son números reales positivos con $a \neq 1$, y r es cualquier número real.

5) $\log_a(M.N) = \log_a M + \log_a N$

6) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

7) $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$

8) $\log_a M^r = r \log_a M$

❖ **Ejemplo 7**:

a) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2\,.\,32) = \log_4 64 = 3 \;\; pues \;\; 4^3 = 64$

b) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$

c) $-\frac{1}{3}\log_2 64 = \log_2 64^{-1/3} = \log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \log_2 \frac{1}{4} = -2$

d) $\log \sqrt[3]{10} = \log 10^{1/3} = \frac{1}{3}\log 10 = \frac{1}{3}$

e) $\ln e^6 - \ln e^2 = 6 \ln e - 2 \ln e = 6 - 2 = 4$

Ejercicios propuestos

5) Resuelvan aplicando las propiedades:

a) $\log_3 \sqrt{27}=$ b) $\log_2 160 - \log_2 5=$ c) $\log_4 192 - \log_4 3=$

d) $\log_4 16^{100}=$ e) $\log_2 8^{33} =$ f) $\log \frac{1}{\sqrt{1000}} =$

g)$\log_3 (27.\sqrt{3}) =$ h) $\ln(e^3.\sqrt{e}) =$ i) $\log_2 \frac{8}{\sqrt{2}} =$

j) $\log_8 \left(2.3\sqrt{\frac{1}{2}}\right) =$ k) $\log_5 \frac{\frac{1}{125}.\sqrt{5}}{\sqrt[3]{25}} =$ l) $\log_3 \frac{\sqrt[3]{3}.27}{81} =$

m) $\log_7 \frac{1}{\sqrt[5]{49}.\sqrt{7}} =$ n) $\log_3 \frac{\sqrt{3}.\frac{1}{9}}{81} =$ o) $\log \left(\frac{0{,}001}{\sqrt{10}}\right)^3 =$

p) $\log_4 8 + \log_4 512 =$ q) $\log_6 1080 - \log_6 5 =$ r) $\ln(\ln e^{e^e})$

Cambio de base

Para algunos propósitos, es útil cambiar la base de los logaritmos. Supongamos que se da $\log_a x$ y se quiere hallar $\log_b x$. Para esto recurrimos a la siguiente fórmula

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Como la calculadora trae las teclas $\boxed{log}$ y $\boxed{ln}$, para calcular logaritmos podemos recurrir a la fórmula de cambio de base,

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} = \frac{\log x}{\log b} = \frac{\ln x}{\ln b}$$

- **Ejemplo 8**: $\log_{16} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{\log 8}{\log 16} = \frac{\ln 8}{\ln 16} = \frac{3}{4}$

Ejercicios propuestos

6) Encontrar usando la calculadora:

a) $\log_7 25 =$ b) $\log_3 107 =$ c) $\log_5 2{,}5 =$ d) $\log_{0,3} 33 =$ e) $\log_{44} 12 =$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Los logaritmos son una herramienta excelente para la solución de problemas propios de las ciencias, a continuación se ejemplifica su uso:

- QUÍMICA

En química los logaritmos se emplean para calcular la acidez de las soluciones.

$$pH = -\log[H^+]$$

Dónde:

pH= acidez de una solución.

$[H^+] =$ concentración de iones de hidrógeno en iones-gramo equivalentes por litro.

- **Problema 1**: Determina el pH de una solución, que tiene una concentración de iones de hidrógeno de 10^{-8} iones-g/lt.

Solución:

La concentración de iones de hidrógeno en la solución es de:

$$[H^+] = 10^{-8} iones - g/lt$$

Se sustituye este valor en la fórmula y se obtiene:

pH=$-\log[H^+]$

pH=$-\log[10^{-8}]$ se aplica la propiedad 8

pH=$-(-8)\log[10] = (8)(1)$

pH=8

- **Problema 2**: Encuentra la concentración de iones de hidrógeno de una solución, si su pH es de 7.

Solución:

Se sustituye pH=7 en la fórmula y se despeja $[H^+]$

$$pH = -\log[H^+]$$

$$7 = -\log[H^+]$$

$$-7 = \log[H^+]$$

$$10^{-7} = [H^+]$$

Luego, la concentración de iones de hidrógeno de una solución es: $[H^+] = 10^{-7}$iones-g/lt.

Problemas

1. Obtén el pH de una solución, cuya concentración es de $1{,}90 \times 10^{-5}$ iones de hidrógeno /lt.

2. La concentración de una conserva de vinagre de iones de hidrógeno es de 6×10^{-4}. Determina su pH.

3. ¿Cuál es la concentración de iones de hidrógeno de una sustancia cuyo pH es de 9?